Durée : 4 heures Option : MP

Partie I

On munit l'espace $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique noté $(\cdot|\cdot)$ et on l'oriente de telle sorte que sa base canonique (i,j,k) soit orthonormale directe.

Pour $u=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ on définit la matrice

$$M_u=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

et f_u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice M_u dans la base (i,j,k). On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices $M_u, u\in\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{V}$ l'ensemble des endomorphismes $f_u, u\in\mathbb{R}^3$.

A.

1. Montrer que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{V}$ sont des espaces vectoriels de dimension 3.

2. Soit $u=(a,b,c)$ et $v=(a',b',c')$. Calculer M_uM_v et montrer que $M_uM_v\in\mathcal{M}$.
   En déduire que $\mathcal{M}$ est une algèbre. Est-elle commutative?

3. On note φ et q les applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définies pour tout $u\in\mathbb{R}^3$ par

$$\begin{cases}\varphi(u)=(u|i+j+k)\\ q(u)=\|u\|^2-(u|f_j(u)).\end{cases}$$

   a. Montrer que φ est une forme linéaire et que q est une forme quadratique positive. Est-ce que q est définie positive?

   b. Calculer le déterminant de M_u en fonction de φ et q. En déduire que f_u n'est pas bijective si et seulement si u appartient à un plan (dont on donnera l'équation) ou à son orthogonal.

4. a. Montrer que tous les endomorphismes f_u ont un vecteur propre unitaire en commun que l'on notera w_1.

   b. Donner une condition nécessaire et suffisante simple sur u pour que f_u soit diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et donner alors les valeurs et les vecteurs propres de f_u.

   c. On note $w_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(i-j)$ et $w_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(i+j-2k)$ et $\mathcal{P}$ le sous espace vectoriel engendré par w_2 et w_3.

      i. Montrer que (w_1,w_2,w_3) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

      ii. Montrer que, pour tout $u\in\mathbb{R}^3$, $\mathcal{P}$ est stable par f_u.

   d. Diagonaliser f_{2i+j+k}.

B. Soit $\Psi: u\mapsto f_u(u)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ et P_m le polynôme $P_m(X)=X^3-X^2+m$ où m désigne un paramètre réel.

1. i Caractériser les éléments de $U=\Psi^{-1}(i)$.

   ii Montrer que U est réunion de deux cercles U_1 et U_2 dont on donnera le centre et le rayon (on appelera U_1 celui dont le centre a des coordonées positives dans la base canonique).

   iii Montrer que f_u est une rotation si et seulement si $u\in U_1$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur m pour que P_m admette trois racines réelles (eventuellement confondues).

3. Montrer que pour $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, M_u est la matrice d'une rotation si et seulement si a, b et c sont les racines de P_m avec $m \in [0, 4/27]$.

4. Etudier f_u pour $u = (2/3, 2/3, -1/3)$ et donner ses éléments caractéristiques.

C. On dit que l'on définit une action à droite θ d'un groupe $(G, \star)$, d'élément neutre e sur un ensemble X si θ est une application de $G \times X$ dans X vérifiant pour tout $x \in X$ et tout $g \in G$ et $g' \in G$

$$\begin{aligned} \theta(e, x) &= x \\ \theta(g, \theta(g', x)) &= \theta(g' \star g, x) \end{aligned}$$

Enfin, si $x \in X$ on appelle orbite de x, que l'on notera $\mathcal{O}_x$, l'ensemble des éléments $\theta(g, x)$ pour $g \in G$.

On note $\mathfrak{S}_3$ le groupe des bijections de $\{1, 2, 3\}$ dans lui-même.

1. Montrer que $\mathfrak{S}_3$ a 6 éléments que l'on précisera.

2. Pour $\tau \in \mathfrak{S}_3$ et $u = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, on note $\theta(\tau, u) = (a_{\tau(1)}, a_{\tau(2)}, a_{\tau(3)})$. Montrer que si $u \in U_1$ alors $\theta(\tau, u) \in U_1$ puis montrer que θ définit une action de $\mathfrak{S}_3$ sur U_1.

3. Montrer que les orbites des éléments de U_1 ont 6 éléments sauf deux d'entre elles, que l'on précisera, qui n'en possèdent que trois.

   Pour les deux orbites ayant 3 éléments donner toutes les rotations associées en précisant succintement leurs éléments caractéristiques.

4. Soit $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que f_u soit une rotation et que son orbite ait 6 éléments. Soit v et w respectivement les éléments de $\mathcal{O}_u$, $v = (b, c, a)$ et $w = (c, a, b)$. On note par α, β et γ les mesures des angles des rotations f_u, f_v et f_w.

   a. Calculer

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \\ \sigma_2 &= \cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha \\ \sigma_3 &= \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma. \end{aligned}$$

   (Utiliser les propriétés de la trace d'un endomorphisme)

   b. En déduire que $\cos\alpha$, $\cos\beta$ et $\cos\gamma$ sont les trois racines du polynôme $X^3 - (3/4)X + (27abc - 2)/8$.

   c. Trouver les six rotations pour $abc = 2/27$.

Partie II

1. Pour p, entier non nul fixé, on considère l'ensemble $\mathcal{I}_p$ des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+p} = a_n$.

   a. Montrer que $\mathcal{I}_p$ est un espace vectoriel de dimension p.

   b. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non nulle de $\mathcal{I}_p$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

   c. On note $\mathcal{P}_1$ l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{I}_p$ telles que $\sum_{n=0}^{p-1} a_n = 0$.
   Quelle est la dimension de ce sous espace vectoriel de $\mathcal{I}_p$.

   d. Montrer que les fonctions f définies par $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ pour $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a \in \mathcal{P}_1$, sont C^∞ sur $]-1, 1]$.

2. On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions développables en série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Pour $k = 0, 1, \ldots, p-1$ on note h_k l'application définie par $h_k(x) = x^k/(1-x^p)$ pour tout x, $x \in]-1,1[$.

   a. Montrer que $h_0, h_1, \ldots, h_{p-1}$ sont des élements de $\mathcal{S}$ et donner leur développement en série entière.

   b. On note $\mathcal{F}_p$ l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{S}$ telles que la suite des coefficients de leur série entière soit un élement de $\mathcal{I}_p$.

      i. Montrer que la famille $(h_k)_{0\leq k\leq p-1}$ est une base de $\mathcal{F}_p$.

      ii. Montrer que $\mathcal{I}_p$ et $\mathcal{F}_p$ sont isomorphes.

3. On définit sur $\mathcal{F}_3$ l'opération:

$$(f|g) = f(0)g(0) + f'(0)g'(0) + \frac{f''(0)g''(0)}{4}.$$

   a. Montrer que ceci définit un produit scalaire sur $\mathcal{F}_3$ et que $\mathcal{B} = (h_0, h_1, h_2)$ est une base orthonormale de $\mathcal{F}$.

   b. Pour $x \in]-1,1[$ on définit :
   $g_0(x) = \frac{1}{(1-x)\sqrt{3}}$, $g_1(x) = \frac{1}{(1+x+x^2)\sqrt{2}}$ et $g_2(x) = \frac{1+2x}{(1+x+x^2)\sqrt{6}}$.
   Montrer que $\mathcal{B}' = (g_0, g_1, g_2)$ est une base orthonormale de $\mathcal{F}_3$ et donner les matrices de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$.

4. Pour $f \in \mathcal{F}_3$ on définit g_f sur $]-1,1[$ par :
   $g_f(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g_f(0) = \lim_{x\to 0} g_f(x)$.

   a. Montrer que $g_f \in \mathcal{F}_3$.

   b. On appelle φ l'application de $\mathcal{F}_3$ dans $\mathcal{F}_3$ qui à f fait correspondre g_f. Montrer que φ est une rotation et préciser son axe et son angle.

   c. Soit $f \in \mathcal{F}_3$ telle que la limite quand x tend vers 1 par valeurs inférieures est finie. Montrer que $\varphi(f) \in \mathcal{F}_3$ admet aussi une limite quand x tend vers 1 par valeurs inférieures. Déterminer ces limites pour $\varphi(g_2)$ et $\varphi(g_3)$.

5. On considère l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $]-1,1[$ qui vérifient l'equation différentielle

$$(1-x^3)y''' - 9x^2y'' - 18xy' - 6y = 0. \qquad (1)$$

   a. Chercher les solutions développables en série entière et montrer que ce sont des éléments de $\mathcal{F}_3$. Les a-t-on tous?

   b. On cherche les solutions définies sur $\mathbb{R}$. Pour ceci, si g est solution de (1) sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, déterminer l'équation différentielle d'ordre 3 vérifiée par f, où $f(x) = (1-x^3)g(x)$.
   Déterminer f et déduire les solutions de (1) sur $]-\infty,1[$ et $]1,\infty[$.
   Etudier les prolongements des solutions en 1 et donner toutes les solutions définies sur $\mathbb{R}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail